This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.
+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.
+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het "watermerk" van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.
+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ______________________

AAS7788
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/15/88 R/DT 07/15/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG84-B52161
035/2: : |a (CaOTULAS)160186204
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Vries, Hk. de |q (Hendrik), |d 1867-1954.
245:10: |a Mathesis en mathematici. |b Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleeraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam, den 10en december 1906, |c door dr. H. de Vries.
260: : |a Delft, |b Gedrukt bij J. Waltman jr., |c 1906.
300/1: : |a 28 p. |c 25 cm.
650/1: 0: |a Mathematics
998: : |c KLB |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: ____________
Camera Operator: ______________

Hosted by Google

MATHESIS EN MATHEMATICI.

Hosted by Google

MATHESIS EN MATHEMATICI.

REDE

uitgesproken bij de aanvaarding van het
Ambt van Hoogleeraar in de Wiskunde aan de Universiteit
van AMSTERDAM, den 10en December 1906,

DOOR

DR. H. DE VRIES.

GEDRUKT BIJ J. WALTMAN JR., DELFT, 1906.

Hosted by Google

Hosted by Google

Edel Grootachtbare Heeren Curatoren dezer Hoogeschool, EdelAchtbare Heeren Burgemeester, Wethouders, en Leden van den Raad dezer Gemeente, Hooggeleerde Heeren Professoren, Zeer Geleerde Heeren Doctoren, Dames en Heeren Studenten, en Gij Allen, die deze plechtigheid met Uwe tegenwoordigheid vereert,

Zeer geachte Toehoorders,

Door het vertrouwen van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, de Curatoren dezer Hoogeschool, en den Raad dezer Gemeente geroepen om de plaats te komen innemen, die mijn hooggeachte voorganger en leermeester VAN PESCH om redenen van gezondheid heeft moeten vaarwel zeggen, valt mij heden naar universitair gebruik de eer te beurt, gedurende eenige oogenblikken het woord tot U te mogen richten over een onderwerp, behoorende tot de wetenschap mijner keuze.

Bij gelegenheden als deze, waar de toehoorders voor het meerendeel niet behooren tot de onmiddellijke vakgenooten, verkeert de mathematicus, vergeleken bij de beoefenaars van tal van andere wetenschappen, steeds in bijzonder ongunstige omstandigheden; want de hulpmiddelen die hem in gewone omstandigheden ten dienste staan, en die hij als onmisbaar heeft leeren beschouwen, ontvallen hem hier één voor één: zijn betoog door het ontwerpen van figuren te ondersteunen, is niet wel doenlijk; zijn gewone taal, voor een aanzienlijk deel uit vaktermen bestaande, kan hij niet spreken; en van zijn onvolprezen kortschrift, de mathematische formules, die op zoo bewonderenswaardig beknopte, en toch zoo volledige wijze lange volzinnen

Hosted by Google

kunnen vervangen, kan hij zich niet bedienen. En zoo is hij dus het gebrekkigst toegerust juist dan, wanneer hij zou wenschen het best toegerust te zijn, nl. wanneer hem de inderdaad zeldzame gelegenheid geboden wordt, in tegenwoordigheid van eene breede schare van belangstellende toeschouwers een tipje van de gordijn op te lichten, waarachter zich het leven zijner wetenschap op voor den oningewijde onzichtbare wijze afwikkelt. Onbekendheid toch met hetgeen er achter dit gordijn voorvalt, doet meeningen en opvattingen ontstaan, die met de werkelijkheid geheel in strijd zijn, en die dus ieder waarachtig mathematicus het tot zijn plicht zal rekenen te bestrijden; om slechts één voorbeeld te noemen: de mathesis is geenszins, zooals veelal geloofd wordt, eene doode wetenschap, die voor geen ontwikkeling en verandering meer vatbaar is; integendeel, zij is, en tegenwoordig meer dan ooit, vol leven, en dit haar leven verloopt geenszins altijd zoo kalm, zoo ongestoord, zoo „passieloos" als wel eens ondersteld wordt; ook de wiskunde kent voor- en tegenspoed, oogenblikken van groot succes, doch ook van twijfel, ja zelfs van angst, en mag zij eenerzijds bogen op een indrukwekkend aantal vurige bewonderaars, anderzijds telt zij eene groote menigte bittere vijanden, die geen gelegenheid voorbij laten gaan om haar het leven onaangenaam te maken.

De belangstelling in de mathesis neemt tegenwoordig eer toe dan af, al verklaarde ook, nog niet zoo heel lang geleden, een van de groote Engelsche dagbladen naar aanleiding van eene bijeenkomst van de leden der „British Association for the advancement of Science": „Saturday morning was devoted to pure mathematics, and so there was nothing of any general interest" [1]); maar veel meer dan de mathesis zelve is tegenwoordig haar beoefenaar, de

[1]) A. R. Forsyth: „Report of the 67th meeting of the Brit. Ass.", p. 542;
W. Ahrens: „Scherz und Ernst in der Mathematik"; Leipzig, Teubner, 1904, p. 467.

Hosted by Google

„homo mathematicus", het voorwerp eener nauwgezette studie. Stelde men zich vroeger onschuldiglijk tevreden met eenige anecdotes over 's mans excentriciteit, waarbij vooral de afgetrokkenheid eene belangrijke rol speelde, verhalen die, van mond tot mond gaande, op den duur de meest ongelooflijke afmetingen aannamen, tegenwoordig is men die periode van naïef vermaak ontgroeid, en wordt de mathematicus als een zeer serieus proefobject beschouwd, en, zoo mogelijk met zijne voorzaten en al, volgens de regelen der kunst ontleed. Aldus geschiedt bijv. in een boek, getiteld „Über die Anlage zur Mathematik", verschenen in 1900, en geschreven door den medicus P. J. MÖBIUS, kleinzoon van AUGUST FERDINAND MÖBIUS, „der hervorragende Astronom und Mathematiker deutscher Nation, und der hervorragende Geometer aller Nationen", zooals van hem gezegd is[1]); ik kan den lust niet weerstaan U enkele uitkomsten waartoe de schrijver geraakt is hier mede te deelen.

Allereerst wordt gezocht naar den zetel van het orgaan voor wiskunde, en in overeenstemming met de onderzoekingen van GALL wordt dit gevonden in eene winding van de hersenen, die eene voortzetting vormt van de onderste winding van het orgaan voor muziek; deze mathematische winding ligt boven de oogholte, zoodat bij sterke ontwikkeling er van, dus bij grooten mathematischen aanleg, de bovenrand dier oogholte, vooral aan de buitenzijde, naar beneden wordt gedrukt, wat ten gevolge heeft dat de wenkbrauwen de oogen in sterkere mate dan bij andere stervelingen het geval is, overschaduwen[2]); daarbij doet zich het verschijnsel bij het linkeroog in den regel sterker gevoelen dan bij het rechter[3]), hoewel uitzonderingen, zooals bijv. bij LEIBNIZ[4]), waar tusschen links en rechts nauwelijks eenig verschil valt waar te nemen, en bij GAUSS[4]), waar het verschijnsel zich aan weerskanten in buiten-

---

[1]) „Gesammelte Werke", I, p. XX.

[2]) l. c. p. 23. [3]) l. c. p. 137. [4]) l. c. p. 141.

gewoon sterke mate, doch op geheel onsymmetrische wijze openbaart, niet zijn buitengesloten.

Nadat het mathematisch orgaan op uitvoerige wijze onderzocht is, gaat de schrijver over tot de ontwikkelingsgeschiedenis van verschillende groote mathematici, en vernemen wij bijv. dat GAUSS reeds op zijn derde jaar fouten in de berekeningen van zijn vader verbeterde, en als knaap van negen jaren de formule voor de sommatie eener rekenkundige reeks als het ware onbewust toepaste bij het sommeeren der getallen van 1 tot 40[1]), en dat AMPÈRE met kiezelsteenen en boonen zat te rekenen, reeds vóór hij de cijfers kende, en eene beschuit, die hem gegeven werd nadat hij ten gevolge van eene lichte ongesteldheid drie dagen had moeten vasten, in stukjes brak om er mede te gaan rekenen, in plaats van haar op te eten[2]).

Na nog eene lange reeks van andere beroemde mannen op mathematisch, physisch en astronomisch gebied, zooals ARAGO, YOUNG, WATT, FOURIER, MONGE, FRESNEL, GALILEI, HUYGENS, CLAIRAUT, BESSEL, EULER en vele anderen de revue te hebben laten passeeren, en de rekenkunstenaars, die eene afzonderlijke groep vormen[3]), onderzocht te hebben, komen de mathematische dames aan de beurt[4]), en hier komt de schrijver tot dezelfde slotsom, waartoe reeds vroeger GINO LORIA in zijne voordracht, getiteld „Donne matematiche" gekomen was[5]), en die ik hier wensch mede te deelen, zonder er echter de geringste verantwoordelijkheid voor te aanvaarden: zij bestaat hierin dat de vrouw, over het algemeen genomen, geen aanleg voor wiskunde blijkt te bezitten, wat aan haar schedel dan ook duidelijk moet zijn waar te nemen, en dat dus „das mathematische Weib wider die Natur sei"[6]); geen enkele beroemde vrouw heeft op mathematisch gebied

1) l. c. p. 36. 2) l. c. p. 37. 3) l. c. p. 66. 4) l. c. p. 77.
5) Zie de „Noot" aan het slot van de voordracht van Loria. 6) l. c. p. 85.

Hosted by Google

iets waarlijk belangrijks verricht, bijv. nieuwe methoden bedacht; zij waren goede leerlingen, meer niet. Zelfs SONJA CORVIN-KRUKOWSKY, de latere SONJA KOWALEWSKY, de mathematische vrouw bij uitnemendheid, heeft niet anders gedaan dan de gedachten uitwerken van haar leermeester WEIERSTRASS[1]).

Het hier uitgesproken oordeel moge wellicht juist zijn indien men zich beperkt tot de mathematici van den allereersten rang, tot de meesters der wetenschap dus; maar m. i. mag hier toch niet verzwegen worden, dat er eene ver boven het middelmatige uitstekende begaafdheid vereischt wordt, om de gedachten van een WEIERSTRASS te kunnen uitwerken op eene wijze zooals SONJA KOWALEWSKY dit heeft vermocht.

In een volgend hoofdstuk wordt de erfelijkheid van het mathematisch talent bestudeerd, en de conclusie getrokken dat dit steeds van den vader, en nooit van de moeder geërfd wordt, zoodat bijv. nooit de dochter van een mathematicus het talent van haar vader overdraagt op haar zoon[2]); en om dit te bewijzen worden stamboomen opgesteld van families waarin het mathematisch talent erfelijk gebleken is, in de allereerste plaats natuurlijk die van de beroemde familie BERNOULLI, waar de mathematici in zoo grooten getale voorkomen, dat zij evenals gekroonde hoofden onderscheiden moeten worden als Jacob I, Jacob II, Johan I, II, III, Nicolaas I, II[3]); en hier tegenover wordt gesteld die van de familie MÖBIUS, waar August Ferdinand, schrijvers grootvader, geheel alleen staat te midden van predikanten, musici en schilders[4]).

Tal van andere onderwerpen worden in het boek van MÖBIUS nog aangeroerd. Zoo geeft de schrijver ons de geruststellende verzekering, dat honger lijden voor het mathematisch talent volstrekt ongevaarlijk is[5]); dat de mathematicus in den regel zeer matig

1) l. c. p. 83.
2) l. c. p. 104. 3) l. c. p. 97. 4) l. c. p. 107.
5) l. c. p. 111.

Hosted by Google

is, en vrij van sterken drank [1]); dat geestesstoringen vergelijkender wijze zeer zeldzaam zijn [2]); dat de gemiddelde levensduur, wellicht ingevolge zijne matigheid, langer is dan die van het menschdom in het algemeen [3]); dat het mathematisch talent kan voorkomen in vereeniging met alle mogelijke andere talenten, zooals bijv. in hooge mate met dat voor philologie bij GAUSS [4]), doch ook met dat voor kunst, bovenal voor muziek; en wat dies meer zij. Doch ik mag Uw geduld niet op eene al te zware proef stellen; het zij mij nog slechts vergund enkele volzinnen uit de „Inleiding" aan te halen, waarin de schrijver zelf het facit uit zijne onderzoekingen trekt [5]). „Die Menschen mit ausgesprochenem mathematischem Talente", zoo zegt hij, „bilden sozusagen eine bevorzugte Kaste. Sie stehen der übrigen Menschheit gegenüber wie die akademisch Gebildeten dem Reste.... Wir Anderen dürfen uns daher nicht beklagen, wenn uns die Mathematiker etwas von oben herab ansehen.... Es ist mit der Mathematik nicht anders als mit der Musik, der Malerei, der Dichtkunst.... Mathematiker kann nicht Jeder werden, die Gescheitheit im Allgemeinen und der Fleiss helfen da gar nichts.... Die Mathematik ist also eigentlich eine Kunst, d.h. ein Können, das nicht willkürlich erworben werden kann.... Wie andere Künstler findet auch der Mathematiker in seiner Kunst alle Freude. Dass einer von Beruf Mathematiker sei, daneben aber ein Steckenpferd reite, die Mathematik als Arbeit, das andere als Freude ansehe, das kommt nicht vor. Man kann in irgend einem Berufe sehr tüchtig sein, und doch mit dem Herzen nicht dabei; bei einem Mathematiker ist das nicht möglich, sowenig wie bei einem Musiker oder Maler".

Werd dit inderdaad zeer vleiend oordeel door een ieder onderschreven, waarlijk de dichter NOVALIS zou gelijk hebben, waar

1) l. c. p. 136. 2) l. c. p. 129.
3) l. c. p. 134. 4) l. c. p. 36. 5) l. c. p. 4.

Hosted by Google

hij de mathematici als „die einzig Glücklichen" prijst[1]); ongelukkig echter is het aantal niet gering van hen, die eene geheel andere meening zijn toegedaan, en van hunne antipathie, ja zelfs van hun diepen afkeer, bij alle voorkomende gelegenheden doen blijken; de billijkheid gebiedt, ook dezen niet met stilzwijgen voorbij te gaan. Zoo zweert dan de overigens zoo zachtzinnige DE GENESTET in zijn bekend gedicht „Aan een lid der commissie tot afneming van het weleer beruchte staatsexamen", den zwolschen rector THIEBOUT, „bij den duursten eed, een eed in de elfde macht", dat hij „zijn algebra vergeet, mathesis diep veracht". Zoo vindt een ander het „Un emploi bien triste et des nuits et des jours, Que d'intégrer sans fin, et de chiffrer toujours" [2]), terwijl een derde tot de ontdekking gekomen is „que les mathématiques dessèchent le cœur" [3]). Een vierde spreekt van de mathesis als van „le monde où l'on s'ennuie"; een vijfde moet wel is waar toegeven „que les mathématiques régissent le monde .... mais elles le régissent sans l'amuser; en een zesde eindelijk vergelijkt zeer poëtisch „les lumières mathématiques à ces pâles soleils du nord, sous lesquels on reste glacé. Ils ne font éclore que des fleurs sans parfum, et des fruits sans saveur" [4]).

Frederik de Groote en Voltaire hebben zich in hunne briefwisseling herhaaldelijk over de mathesis en hare beoefenaars uitgelaten, als gevolg van de groote belangstelling van eerstgenoemde in de werkzaamheden der Pruisische Akademie van Wetenschappen; en hoewel beiden geenszins bepaaldelijk tot de vijanden der wiskunde gerekend mogen worden, en niet zelden genegen zijn haar den tol hunner bewondering te betalen, zoo drijven zij toch ook herhaaldelijk den spot met „MM. les géomètres, qui carrent éternelle-

---

1) Jahresber. d. deutschen Math. Ver., Dl 13 (6), 1904, p. 358.
2) J. Bertrand, „Éloges académiques", p. 119; Ahrens, l. c. p. 82.
3) A. Rebière, „Mathématiques et mathématiciens", p. 167.
4) A. Rebière, l. c. p. 160.

Hosted by Google

ment des courbes inutiles" [1]), en die zich onledig houden met „des points sans étendue, et des lignes sans profondeur" [2]).

Een van de grimmigste en onverzoenlijkste vijanden der wiskunde, inzonderheid van die der Grieken, was ongetwijfeld SCHOPENHAUER, in wiens geschriften de mathesis herhaalde malen het onderwerp uitmaakt eener zeer weinig vleiende bespreking. SCHOPENHAUER heeft het voornamelijk gemunt op de meetkunde van EUCLIDES; hij maakt zich boos naar aanleiding van diens bewijs van de stelling van PYTHAGORAS, dat hij minachtelijk een „muizenval-bewijs" noemt, omdat het verstand er z. i. niet door overtuigd, maar evenals een muis in de val op arglistige wijze door verschalkt wordt; en hij stelt er een ander voor in de plaats, dat echter slechts geldig is voor het bijzondere geval van den gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek, en — voor een philosoof wel ongelukkig — reeds voorkomt bij Plato [3]).

Met de Meetkunde van EUCLIDES is echter zijne belangstelling in de mathesis nog geenszins uitgeput; ook tot de hoogere gedeelten strekt zich zijn onderzoek uit, en zoo komt hij bijv. met betrekking tot de Analyse tot het volgende, met het oog op het hierboven besproken boek van MÖBIUS inderdaad onverwachte resultaat [4]): „Dass die niedrigste aller Geistestätigkeiten die arithmetische sei, wird dadurch belegt, dass sie die einzige ist welche auch durch eine Maschine ausgeführt werden kann. Nun läuft alle analysis finitorum et infinitorum im Grunde doch auf Rechnen zurück; danach bemesse man nun den sogenannten mathematischen Tiefsinn, über welchen schon LICHTENBERG sich lustig macht indem er sagt: „Es ist fast mit der Mathematik wie mit der Theologie. Sowie die der letzteren Beflissenen, zumal wenn sie in Ämtern stehen, Anspruch auf einen besonderen Kredit von Heiligkeit und

1) Ahrens, l. c. p. 83.
2) Ahrens, l. c. p. 83.
3) Jahresber., l. c. p. 359.
4) Werke VI, p. 52; Jahresber., l. c. p. 360.

Hosted by Google

eine nähere Verwandtschaft mit Gott machen, so verlangt sehr oft der sogenannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die grössten Plunderköpfe gibt, die man nur finden kann, untauglich zu irgend einem Geschäft das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine als des Denkens ist" ".

Men ziet, erger kan het al haast niet.

Eene zeer eigenaardige plaats in de rij onzer hateren neemt ten slotte in EUGEN DÜHRING, eigenaardig, omdat wij hier, wat men ongetwijfeld niet zou verwachten, te doen hebben met een mathematicus van professie, schrijver van een boek, getiteld: „Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik", dat in 1872 door de philosophische faculteit der universiteit te Göttingen met goud werd bekroond, terwijl in het voor den schrijver zeer vleiend judicium o. a. geprezen worden „die warme Anerkennung jedes Verdienstes, die erklärende Entschuldigung des Misslungenen, und die vornehme Schonung, mit der über das Verkehrte hinweggegangen wird" [1]).

Had de faculteit ook over den 2^{en} en 3^{en} druk een oordeel moeten uitbrengen, ik betwijfel of haar de „vornehme Schonung" opnieuw opgevallen zou zijn; verbitterd nl. doordien hem inmiddels de venia legendi als privaat-docent aan de universiteit te Berlijn ontnomen werd, begon de schrijver zich toe te leggen op het beschimpen vooral van hen, die volgens het oordeel van alle anderen aan de spits marcheeren, met uitzondering van zijne godheid LAGRANGE en nog eenige weinige andere uitverkorenen, zooals PONCELET; en het moet erkend worden, dat hij het in deze in mathematische kringen ietwat ongebruikelijke richting door ijver en toewijding tot eene ongekende virtuositeit gebracht heeft. Maar DÜHRING's

1) Zie de 3e editie, 1887, p. X.

vijandschap ontspringt uit eene troebele bron; zijn oordeel kan dus ook voor ons slechts zeer geringe waarde hebben.

Men kan niet zeggen dat de wiskundigen zich over het algemeen van de tegen hunne wetenschap en henzelven gerichte aanvallen veel hebben aangetrokken; in den regel hebben zij het stilzwijgen bewaard, doch een enkele maal is bij dezen of genen het geduld eens uitgeput geraakt, en dit is, voor zoover mij bekend, het laatst overkomen aan ALFRED PRINGSHEIM, hoogleeraar aan de universiteit te München, die in eene rede, uitgesproken den 14^{en} Maart 1904 in de Koninklijk Beiersche Akademie van Wetenschappen [1]), de uitspraken van SCHOPENHAUER eens aan een grondig kritisch onderzoek onderworpen heeft, bij welke gelegenheid de groote wijsgeer nu juist geen heel gelukkig figuur maakt. Niet alleen laat PRINGSHEIM, naar aanleiding van SCHOPENHAUER's hierboven aangehaald oordeel over de Analyse, duidelijk zien dat SCHOPENHAUER de Analyse met het cijferen verwart, en van de eigenlijke Analyse „auch nicht die leiseste Ahnung besitzt" [2]); niet alleen toont hij aan, dat zelfs de meetkunde der Grieken niet tot zijne sterke zijden behoort, en dat hij in ieder geval van het eigenlijke zwakke punt dezer meetkunde, nl. het postulaat betreffende de evenwijdige lijnen, hoegenaamd geen begrip blijkt te bezitten [3]); doch, wat erger is, hij beticht en overtuigt hem van opzettelijke vervalsching van citaten, waardoor hij de schrijvers juist het omgekeerde laat zeggen van wat zij bedoeld hebben; zoo van den hierboven geciteerden LICHTENBERG [4]), zoo ook van niemand minder dan DESCARTES [5]). En zoo is dan door de rede van PRINGSHEIM althans één van de

1) Jahresber., l. c. p. 357.
2) Jahresber., l. c. p. 362.
3) Jahresber., l. c. p. 359.
4) Jahresber., l. c. p. 362.
5) Jahresber., l. c. p. 367.

Hosted by Google

vijanden onzer wetenschap, maar daarvoor dan ook de allergevaarlijkste, wiens autoriteit, zooals PRINGSHEIM zegt [1]), steeds in de weegschaal geworpen wordt wanneer inkrimping van het onderwijs in wiskunde gepredikt wordt, onschadelijk gemaakt. Neen, een Montblanc naast een molshoop, zooals SCHOPENHAUER het in beminnelijke bescheidenheid uitdrukt waar hij zich zelven met HELMHOLTZ vergelijkt [2]), dien indruk maakt hij na het onderzoek van PRINGSHEIM nu juist niet.

Hoe zou het wel komen, zoo vragen wij, dat onze wetenschap, die hare beoefenaars tot zulk een hoogen graad van vervoering vermag te brengen, en een menschenleven lang in dien toestand weet te houden, anderzijds zoo velen met zulk een diepen afkeer vervult? Ik kan het vermoeden niet van mij afzetten dat dit laatste te wijten is aan onkunde, of liever, wat altijd veel erger is, aan halve kunde, en dat de min vleiende oordeelvellingen die ik hierboven citeerde, alsmede de vele andere die ik met stilzwijgen voorbij ben gegaan, met de eigenlijke wetenschap der wiskunde niets te maken hebben, doch, buiten medeweten van de oordeelvellers zelven om, uitsluitend gericht zijn tegen de lagere, of laat ons wellicht beter zeggen de schoolmathesis, die dan, zooals zulks ook SCHOPENHAUER overkwam, abuisievelijk met de eigenlijke wetenschap verward wordt. Maar evenmin als het spelen van toonladders en vingeroefeningen eigenlijke kunst is, evenmin ish et herleiden van wortelvormen of het construeeren van driehoeken eigenlijke wetenschap; en even waardeloos als een oordeel over de muziek zou zijn van hem, die nooit de namen BEETHOVEN en WAGNER heeft hooren uitspreken, even waardeloos is het oordeel over de mathesis van diegenen, die van de scheppingen van een EULER, GAUSS, LAGRANGE, LAPLACE, JACOBI, ABEL, WEIERSTRASS,

1) Jahresber., l. c. p 358.
2) Ahrens, l. c p. 457.

RIEMANN, STEINER, GRASSMANN, LOBATSCHEWSKY, BOLYAI, en hoe zij allen heeten mogen, volslagen onkundig zijn.

Stelt men aan eene exacte wetenschap den eisch dat zij op zich zelf staande waarheden, feiten en resultaten in grooten getale onder algemeene gezichtspunten moet weten te vereenigen, en algemeene methoden moet kunnen aanwijzen, met wier hulp uitgebreide categorieën van vraagstukken langs zekeren weg tot oplossing gebracht kunnen worden, dan wordt de wiskunde eigenlijk pas eene wetenschap door het invoeren van het coördinatenstelsel in de meetkunde, en van het functiebegrip in de algebra. Hierdoor toch grijpt in de beschouwingswijze plotseling een geheele ommekeer plaats. De elementaire algebra leert ons in enkele bijzonder eenvoudige gevallen de onbekenden op te lossen uit algebraïsche vergelijkingen, en in zooverre hiervoor inderdaad algemeene methoden bestaan, zou zij wellicht nog het allermeest aanspraak kunnen maken op den naam van wetenschap; doch hoe dit zij, zij bepaalt hare aandacht in ieder geval uitsluitend tot die enkele waarden van de onbekende, die het linker lid der op nul herleide vergelijking de waarde nul inderdaad doen aannemen. Door de invoering van het functiebegrip wordt dit alles geheel anders: wij beschouwen niet enkele geïsoleerde waarden van de onbekende x, maar laten integendeel deze grootheid alle mogelijke waarden, van $-\infty$ tot $+\infty$, geleidelijk doorloopen, en gaan daarbij nauwkeurig na welke waarden het linker lid der vergelijking, dat wij nu eene functie y van x noemen, aanneemt ten gevolge van de veranderlijkheid van x. En over de op deze wijze aan elkaar toegevoegde waardenparen van x en y verkrijgen wij niet, zooals SCHOPENHAUER meent [1]), een overzicht door middel van „durch mühsäligste Rechnung zu gewinnende" tabellen, maar integendeel, althans in zeer vele gevallen, door middel van het coördinatenstelsel, waardoor de graphische voorstellingen ontstaan, die van de mathesis uit hun

1) Jahresber., l. c. p. 363.

weg naar de mechanica, physica, chemie, astronomie, meteorologie, technische wetenschappen, levensverzekering, ... ja waar al niet heen gevonden hebben. De mathematicus verheugt zich over het groote nut, dat allerwegen gesticht wordt door de zoo eenvoudige gedachte, het waardenbeloop eener functie zichtbaar voor te stellen door eene kromme lijn; nog meer verheugd echter is hij door de winst, die deze gedachte voor de mathesis zelve afwerpt. Er wacht hem nl. nu eene dubbele taak, waaraan hij zich volgaarne onderwerpt: eenerzijds moet hij de verschillende kromme lijnen, en evenzoo in de ruimte de gebogen oppervlakken, naar den aard hunner vergelijkingen gaan classificeeren, van iedere klasse de kenmerkende algemeene, en van de verschillende exemplaren eener zelfde klasse de bijzondere eigenschappen opsporen; anderzijds wacht hem het analytisch onderzoek der verschillende klassen van functiën. En de algebra en de meetkunde, die in de schoolmathesis zoo ver van elkaar verwijderd zijn, vloeien hier ineen tot één harmonisch geheel, de analytische meetkunde, zoodat de mogelijkheid gegeven is meetkundige vraagstukken langs analytischen weg tot oplossing te brengen, en omgekeerd ingewikkelde analytische beschouwingen door middel van meetkundige voorstellingen althans zeer krachtdadig te ondersteunen, waarvan de theorie der RIEMANNsche oppervlakken, en der puntverzamelingen van G. CANTOR, wellicht de pakkendste voorbeelden zijn.

Een vraagstuk dat bij alle kromme lijnen van groot belang is, is het bepalen van de raaklijn. Het onderzoek leert dat de tangens van den hoek, dien de raaklijn insluit met de positieve x-as, afhankelijk is van de meerdere of mindere snelheid, waarmede de functie verandert, en LEIBNIZ leert ons dezen tangens schrijven in den allergelukkigsten vorm van het quotient van twee oneindig kleine aangroeiingen [1]), en schenkt ons daarmede als het ware een micro-

1) Cantor's „Vorlesungen", Bd III, pp. 160, 181.

scoop van onbeperkt vergrootend vermogen; het begrip „differentiaalquotient", of „afgeleide functie", welks oorsprong te zoeken is in het vage bewustzijn van de beweeglijkheid der dingen, en van de snelheid waarmede de verschijnselen plaats grijpen, is daarmede gewonnen [1]); het verspreidt zich geleidelijk over alle hierboven reeds genoemde gebieden van toepassing, en voert overal tot belangrijke uitkomsten. Tegelijk met de differentiaalrekening ontwikkelt zich ook de omgekeerde rekenwijze, de integraalrekening [2]), en zoodra men leert inzien dat de veranderingen, die een systeem van lichamen gedurende een oneindig klein tijdsinterval ondergaat, uitsluitend afhangen van den toestand van het systeem bij den aanvang van dat interval, treden de differentiaalvergelijkingen op, eerst de gewone, daarna, naar aanleiding van het vraagstuk van de trillende snaar, de partieele, en het vraagstuk der isoperimetrische figuren schenkt het aanzijn aan de variatierekening [3]); de allergrootste triumphen echter worden verkregen door toepassing van de nieuwe hulpmiddelen op het onderzoek van de beweging der hemellichamen [4]). Een geheel nieuwe wereld opent zich en vraagstukken, waaraan men vroeger nauwelijks durfde denken, worden toegankelijk.

Wat ik hier schetste, zijn in zeer ruwe trekken de hoofdlijnen van de ontwikkelingsgeschiedenis der wiskunde gedurende de 17^e^ en 18^e^ eeuw; door de ongelooflijke productiviteit van EULER, die zelfs bij zijne volslagen blindheid geen einde nam, door de BERNOULLI's, door de groote fransche meesters MONGE, LAGRANGE, LAPLACE e. a., verkreeg de wiskunde een vroeger voor onmogelijk gehouden rijkdom aan resultaten.

Volgt de 19e eeuw. Door de verbeterde onderwijstoestanden, zoo aan de middelbare scholen als vooral aan de universiteiten,

1) É. Picard, „Bulletin d. sc. math.", t. 28, 1904, p. 271.
2) Cantor's „Vorlesungen", Bd. II, 2e Aufl., p. 921.
3) É. Picard, l. c. p. 273.
4) É. Picard, l. c. p. 274.

Hosted by Google

waar gedurende de 18e eeuw, althans in Duitschland, bijna uitsluitend slechts elementaire wiskunde gedoceerd werd, neemt het aantal mathematici sterk toe; groote bedrijvigheid heerscht er allerwegen, maar de aard der mathematische studiën ondergaat eene wijziging. In de eerste plaats begint de zuivere of synthetische meetkunde, die door de geweldige vlucht welke de Analyse genomen had geheel op den achtergrond geraakt was, door de bemoeiingen van MONGE en zijne leerlingen, en verder door PONCELET, STEINER, MÖBIUS, CHASLES en VON STAUDT de haar van rechtswege toekomende plaats te heroveren [1]); maar in de tweede plaats begint men, waaraan men in de voorgaande periode door den geweldigen aandrang van nieuwe problemen niet de noodige aandacht had kunnen schenken [2]), en in afwijking van het bekende woord van D'ALEMBERT, dat deze periode zoo juist kenmerkt: „allez en avant, et la foi vous viendra"[2]), de grondslagen waarop de nieuwe methoden berusten, aan een nauwgezet onderzoek te onderwerpen; er breekt eene periode van kritiek aan, die tot op den huidigen dag voortduurt.

Te gelijker tijd echter wordt op de reeds verkregen resultaten onversaagd voortgebouwd. Men weet dat een punt in het platte vlak bepaald wordt door twee, in de ruimte door drie coördinaten, en dat in het eene geval eene betrekking tusschen die twee coördinaten eene lijn, in het andere eene betrekking tusschen die drie coördinaten een oppervlak voorstelt. Uit een analytisch oogpunt is er nu natuurlijk hoegenaamd geen bezwaar eene betrekking neer te schrijven tusschen vier of meer coördinaten van een punt, maar zulk eene betrekking zou slechts meetkundig geïnterpreteerd kunnen worden in eene ruimte, waarvan het aantal afmetingen grooter is dan drie. Hier geraakte de mathematicus der 19e eeuw in een moeilijk dilemma. Wat moest hij doen? Zou hij, zwichtend voor de overweging dat ruimten van meer dan drie afmetingen

1) G. Darboux, „Bulletin d. sc. math.", t. 28, 1904, p. 234—263.
2) É. Picard, l. c. p. 273.

hoogst waarschijnlijk slechts producten der phantasie zijn, en dat dus de kans op eenige practische toepassing zijner eventueel te verkrijgen resultaten vrijwel nihil is, van het onderzoek van de eigenschappen van zulke denkbeeldige ruimten afzien? Of zou hij, het verwijt op zich ladend van zijn tijd met het najagen van hersenschimmen te verbeuzelen, en gevaar loopend van door de spiritisten tot de hunnen gerekend te worden [1]), zich met alle kracht op het onderzoek dier ruimten gaan toeleggen? Hij heeft het laatste gekozen; met WEIERSTRASS van meening, „dass man den Zweck einer Wissenschaft nicht ausserhalb derselben suchen darf, und dass es nicht nur ihre Würde beeinträchtigen, nein dass es geradezu an ihr sich versündigen heisst, wenn man, statt sich ihr mit vollster Liebe und Hingebung zu widmen, nur Dienste von ihr verlangt, und darum wohl gar sich vermisst, der weiterschreitenden Forschung ihren Weg vorzeichnen zu wollen, und jede Richtung verwirft, die nicht sofort zu praktisch verwertbaren Resultaten zu führen scheint" [2]), heeft hij getroost de meerdimensionale meetkunde ontwikkeld, in Duitschland vriendelijk „Dimensionenschwindel" genoemd; en tot loon voor zijne moeite heeft hij een oneindig dieper inzicht in het wezen ook der meetkunde van drie en minder afmetingen verworven.

Omstreeks het jaar 1861 [3]) werd door WEIERSTRASS, denzelfden, wiens in de Akademie van Wetenschappen te Berlijn gesproken woorden wij zooeven aanhaalden, eene ontdekking gedaan, die in de gelederen der mathematici een oogenblik van ontsteltenis teweeg bracht. Men had tot nu toe steeds in de vaste overtuiging geleefd, dat van de zoogenaamde continuiteit eener functie de differentieerbaarheid een natuurlijk en noodzakelijk gevolg was, totdat WEIERSTRASS functies ontdekte, die aan alle voorwaarden van

1) W. KAPTEYN, „De meerdimensionale Meetk." Utrecht, J. VAN DRUTEN, 1901, p. 21.

2) Antrittsrede in der Berl. Akad., Monatsber., 1857, p. 350; Ahrens, l. c. p. 192.

3) Vgl. F. KLEIN, „Anwendung der Diff. u. Int. rechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien." Leipzig, TEUBNER, 1902, p. 83.

Hosted by Google

continuiteit voldoen, en niettemin niet te differentieeren zijn. Het laat zich begrijpen dat de mathesis een oogenblik van angst doorleefde, want het stond te vreezen dat verscheidene der vroeger verkregen resultaten onjuist zouden blijken, doordien men wellicht functies gedifferentieerd had die deze bewerking in het geheel niet kunnen verdragen. Gelukkig is alles ten goede gekeerd, want hoewel het aantal voorwaarden, waaraan eene functie moet voldoen om zonder gevaar gedifferentieerd te kunnen worden, zóó groot is, dat men zich eigenlijk moet verbazen dat er nog zulke functies bestaan, zooals KLEIN het uitdrukt [1]), zoo is het in werkelijkheid veel moeilijker eene functie te vinden die niet, dan eene die wel gedifferentieerd kan worden, en in ieder geval is de kans dat zulk eene functie in de toepassing zou voorkomen, uiterst gering. Maar niettemin zag de mathematicus zich in de noodzakelijkheid geplaatst, de fundamenten van het gebouw der mathesis in allen deele te herzien; en dit onderzoek heeft rijke vruchten afgeworpen, maar heeft ons tevens geleerd dat in de schijnbaar allereenvoudigste begrippen, zooals bijv. in het naar men zou meenen zoo simpele begrip „getal", zeer groote moeilijkheden liggen opgesloten, zoodra men volkomen strenge en onaantastbare begrippen en bewijzen eischt [2]).

Dat bij het bloot leggen en herzien van de fundamenten van het gebouw der mathesis de grondslagen der meetkunde niet vergeten zouden worden, moet voor ieder, die niet volslagen vreemdeling is op dit gebied, onmiddellijk duidelijk zijn. Had het beruchte raadsel van de evenwijdige lijnen, d. w. z. de onbewijsbaarheid van het 5e postulaat van EUCLIDES, hetwelk zegt dat indien bij twee lijnen, door eene derde gesneden, de som der binnenhoeken aan de eene zijde der snijlijn kleiner is dan twee rechten, de twee lijnen, aan diezelfde zijde genoegzaam verlengd, elkaar nood-

1) l. c. p. 82.
2) É. PICARD, l. c. p. 268.

Hosted by Google

zakelijk zullen ontmoeten; had dit raadsel, zeg ik, de gemoederen zelfs niet met rust gelaten in perioden, toen men overigens voor meetkundige kwestiën slechts zeer weinig belangstelling had, hoe zou men er onverschillig voor hebben kunnen blijven in een tijd, waarin juist de kritiek zoo op den voorgrond treedt. GAUSS kende de oplossing van het raadsel sedert jaren, maar had, het geschreeuw der Böotiers vreezende, zooals hij het in een brief aan BESSEL uitdrukt[1]), er tegen op gezien haar te publiceeren; en dat zijn vrees in dezen niet zoo geheel ongegrond was, bewees nog vele jaren later de Böotier DÜHRING, die in verband met deze kwestie orakelde dat GAUSS aan „mathematische Verstandesverrückung" lijdende was[2]). Andere onderzoekers, zooals WALLIS, SACCHERI, LAMBERT, SCHWEIKART, TAURINUS, waren meer of minder ver op den goeden weg geweest, echter zonder het einddoel te bereiken[3]); WOLFGANG BOLYAI, een studiemakker van GAUSS, had zelfs zijn geheele wetenschappelijk leven vruchteloos aan dit ééne vraagstuk opgeofferd, en daarom zijn zoon JOHANN, die trouwens volstrekt geen mathematicus van professie, maar integendeel Hongaarsch cavallerie-officier, en door zijn opvliegend karakter, zijn persoonlijken moed, en zijne uitmuntende Damascener kling een van de meest gevreesde vechtersbazen uit het leger was, bezworen toch niet denzelfden weg op te gaan, wat natuurlijk juist de tegenovergestelde uitwerking had; en ziet, aan JOHANN gelukte de oplossing, en ongeveer gelijktijdig met, doch geheel onafhankelijk van hem, aan NICOLAI IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKY, rector van de universiteit te Kasan[4]). En uit de onderzoekingen van deze mannen hebben wij tot onze verbazing geleerd, dat het 5^e^ postulaat onbewijsbaar is, omdat de inhoud er van geen stelling,

1) Ges. Werke, Bd. 8, p. 201.

2) Principien d. Mech., 3e Aufl. p. 521.

3) Vgl. F. Engel u. P. Stäckel, „Die Theorie d. Parallellinien von Euklid bis auf GAUSS", Leipzig, Teubner, 1895.

4) Vgl. N. I. Lobatschefsky, „Zwei geom. Abh.", vertaald en uitgegeven door F. Engel, Leipzig, Teubner, 1899.

Hosted by Google

d. w. z. geen waarheid, doch slechts eene willekeurige aanname, eene conventie is. Dat door een punt buiten eene lijn slechts ééne lijn getrokken kan worden evenwijdig aan die lijn, iets waaraan men twintig eeuwen lang met onwrikbaar geloof had vastgehouden, is ten slotte gebleken logisch niet noodzakelijk te zijn; en de som van de hoeken van een driehoek is slechts dan gelijk aan twee rechten, indien wij zulks wenschen. Wordt dan wellicht ten slotte de geheele meetkunde op losse schroeven gezet? Het tegendeel is waar; nu pas zijn de fundamenten zóó hecht, dat zij den tand des tijds gedurende alle volgende eeuwen zullen kunnen weerstaan, en de soliditeit van vroeger was slechts schijn; wat uit deze onderzoekingen blijkt, is integendeel dit, dat absolute waarheid zelfs in de meetkunde niet te vinden is; iedere meetkunde is juist, in zooverre de praemissen juist zijn waarvan zij uitgaat, maar in de keuze dezer praemissen heerscht een zekere vrijheid.

Zijn dit nu bloemen zonder geur, en vruchten zonder smaak? Waarlijk, iemands wetenschappelijk reukorgaan moet al zeer defect zijn, zal hem de geur van zulke bloemen ontgaan; liever dan dit te onderstellen, wil ik aannemen dat menigeen den geur niet bemerkt, doordien hem het bestaan der bloemen zelve onbekend is. Deze resultaten tellen integendeel mede onder de grootste triumphen van den menschelijken geest, en gelukkig prijs ik hem, wien het vergund is het, zij het ook dikwijls steile en steenachtige pad der groote baanbrekers volgend, den top van den berg werkelijk te bereiken, en van daar uit te genieten van het uitzicht, dat de meesters onzer wetenschap vóór ons ontsloten hebben. De toekomst is zoo rooskleurig mogelijk, want de onontbeerlijkheid der mathesis wordt dagelijks meer erkend; de chemie, oorspronkelijk eene zuiver experimenteele wetenschap, ziet zich hoe langer hoe onweerstaanbaarder naar het mathematische vaarwater heengedreven; de biologie met hare frequentiekrommen

Hosted by Google

Dames en Heeren Studenten in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde,

Ik heb het groote voordeel, voor Uw aangezicht niet als een vreemdeling te verschijnen; velen Uwer toch mocht ik reeds in mijne voordrachten over de Projectieve Meetkunde tot mijne toehoorders rekenen, ja enkelen Uwer zijn zelfs nog mijne leerlingen van de Hoogere Burgerschool op de Keizersgracht; Gij weet dus wat Gij wèl, en wat Gij niet van mij verwachten kunt.

Volgens een in omloop zijnd verhaal moet de mathematicus KUMMER, U allen wel bekend, in zóó hooge mate de sympathie zijner toehoorders bezeten hebben, dat één van dezen zich in vervoering eens bereid verklaard moet hebben desnoods een spiegelsextant met waterpas en al te willen inslikken, indien KUMMER zulks van hem mocht verlangen[1]). Gij moogt U overtuigd houden, dat ik dit inderdaad niet alledaagsch bewijs van waardeering nooit van U zal vergen; ik zal reeds zeer tevreden zijn indien onze verhouding in de toekomst zoo mag blijven, als zij tot nu toe geweest is.

Ik heb gezegd.

1) Zeitschr. von Hoffmann, Bd. 24 (1893), p. 310; Ahrens, l. c. p. 309.

Hosted by Google